



TD14

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS.

EXERCICE 1 EML 2023 sujet 0 Exercice 1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Le but de cette question est de diagonaliser A .
 - a. Justifier que la matrice A est de rang 1.
 - b. En déduire une valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.
 - c. Justifier que 6 est valeur propre de A et qu'un vecteur propre associé est $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 - d. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Résoudre le système différentiel :

$$(SH) \begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases}.$$

3. Soient $X_1 : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ deux solutions du système (SH) .

On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $X_1(t_0) = X_2(t_0)$. Que pouvez-vous dire de X_1 et X_2 .

4.
 - a. Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 - b. Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
5. Dans cette question, on considère trois fonctions continues $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on s'intéresse au système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' &= x + 2y - z + a(t) \\ y' &= 2x + 4y - 2z + b(t) \\ z' &= -x - 2y + z + c(t) \end{cases},$$

où x , y et z sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , inconnues, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de la variable réelle t .

Une solution de (S) est une application $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que, pour tout réel t , on ait

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2y(t) - z(t) + a(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) + b(t) \\ z'(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) + c(t) \end{cases} .$$

- a. Préciser quel vecteur colonne $B(t) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dépendant de la variable réelle t permet d'écrire le système (S) sous la forme

$$(S) \quad X' = AX + B(t).$$

- b. Soit Y une solution particulière sur \mathbb{R} de (S) . Démontrer que $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur \mathbb{R} si et seulement si $Z : t \mapsto X(t) - Y(t)$ est solution de (SH) sur \mathbb{R} , (SH) désignant le système de la question 2.

- c. Dans cette question, on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) = 1$, $b(t) = 2(1 - e^t)$ et $c(t) = e^t - 1$.

Démontrer que $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur \mathbb{R} .

En déduire toutes les solutions du système différentiel (S) sur \mathbb{R} .

Mathématiques appliquées - Sujet zéro 1

Exercice 1

Partie 1

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est A .

1. Déterminer le rang de $A - 6I_3$.

En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.

2. Soit $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U = AV - 2V$.

Montrer que U est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre associée.

3. Posons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) Donner la matrice B de f dans cette base.

(c) Montrer alors qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ et expliciter la matrice P . On ne cherchera pas P^{-1} .

4. La matrice A est-elle inversible ? La matrice A est-elle diagonalisable ?

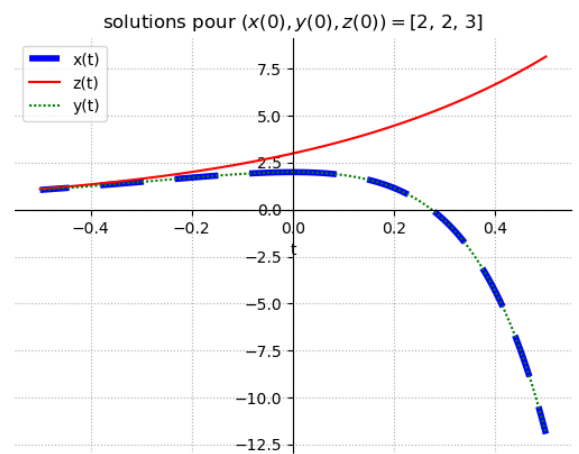
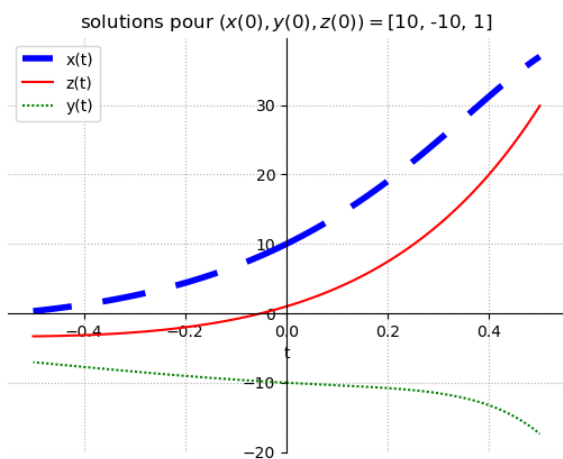
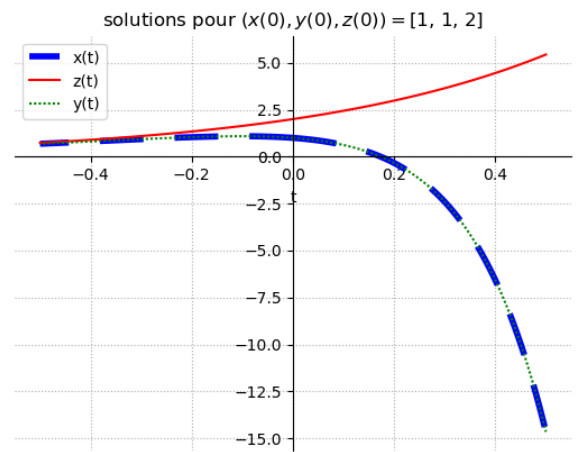
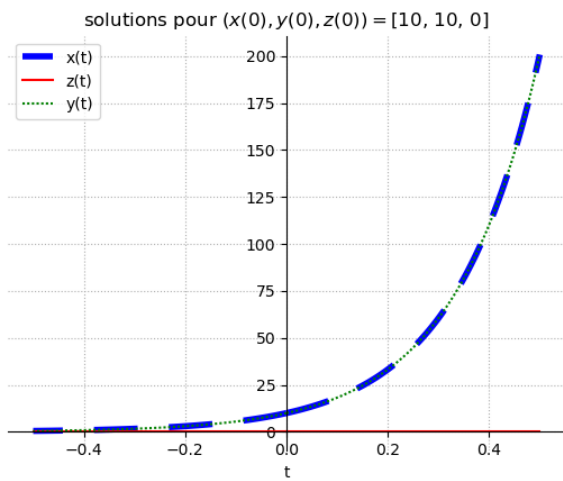
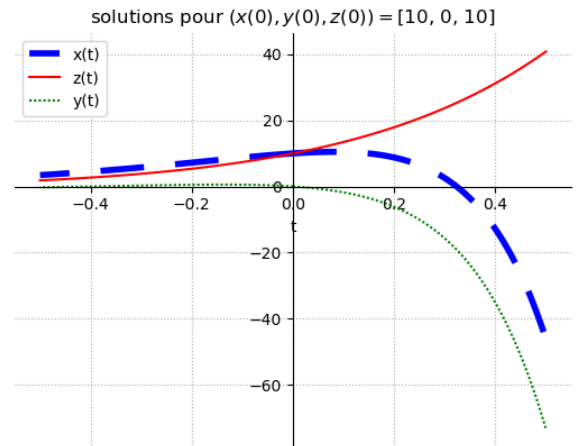
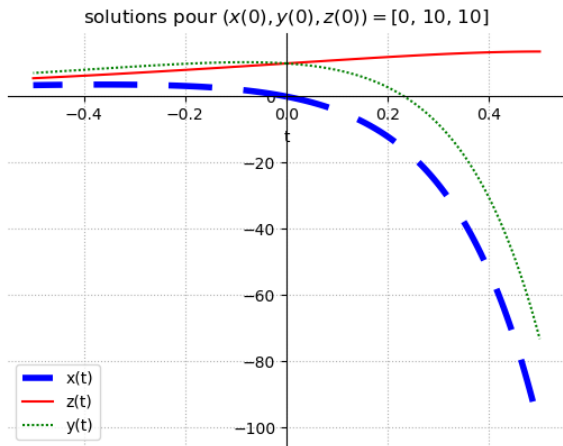
Partie 2

On considère le système différentiel suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) &= 5x(t) + y(t) - 4z(t), \\ y'(t) &= 3x(t) + 3y(t) - 4z(t), \\ z'(t) &= x(t) - y(t) + 2z(t). \end{cases}$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On note pour tout réel t : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

5. En utilisant le module `scipy.integrate` de Python, on obtient le tracé suivant des solutions du système, en faisant varier les valeurs de $x(0), y(0), z(0)$.



Que peut-on conjecturer quand $x(0) = y(0)$?

6. Montrer que pour tout réel t : $X'(t) = A X(t)$.
7. On note pour tout réel t : $Y(t) = P^{-1} X(t)$. On admet que pour tout réel t , $Y'(t) = P^{-1} X'(t)$. Montrer que pour tout réel t : $Y'(t) = B Y(t)$.

8. (a) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur \mathbb{R} vérifiant l'équation différentielle (\mathcal{E}_1) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 6\varphi(t) \quad (\mathcal{E}_1)$$

- (b) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur \mathbb{R} vérifiant l'équation différentielle (\mathcal{E}_2) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 2\varphi(t) \quad (\mathcal{E}_2)$$

- (c) Soit c un réel.

Montrer que la fonction $t \longrightarrow cte^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_3 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t} \quad (\mathcal{E}_3)$$

Déterminer toutes les solutions de (\mathcal{E}_3) .

9. En notant, pour tout réel t , $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, montrer que γ est solution de (\mathcal{E}_1) , β est solution de (\mathcal{E}_2) et α est solution de (\mathcal{E}_3) pour un réel c bien choisi.

10. Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) &= (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{cases}$$

11. En déduire, en notant $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0)$, que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) &= \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0) \right) e^{2t} + \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0 \right) e^{6t} \\ y(t) &= \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(y_0 - x_0) \right) e^{2t} + \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0 \right) e^{6t} \\ z(t) &= \left((x_0 - y_0)t + z_0 \right) e^{2t} \end{cases}$$

12. Justifier la conjecture faite à la question 5.