



## TD14

### SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS.

#### EXERCICE 1 EML 2023 sujet 0 Exercice 1.

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Le but de cette question est de diagonaliser  $A$ .
  - a. Justifier que la matrice  $A$  est de rang 1.
  - b. En déduire une valeur propre de  $A$  ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.
  - c. Justifier que 6 est valeur propre de  $A$  et qu'un vecteur propre associé est  $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
  - d. Déterminer une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .

2. Résoudre le système différentiel :

$$(SH) \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases} .$$

3. Soient  $X_1 : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$  et  $X_2 : t \mapsto X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$  deux solutions du système  $(SH)$ .

On suppose qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  vérifiant  $X_1(t_0) = X_2(t_0)$ . Que pouvez-vous dire de  $X_1$  et  $X_2$ ?

4. a. Déterminer la solution  $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  du système  $(SH)$  vérifiant  $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- b. Déterminer la solution  $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  du système  $(SH)$  vérifiant  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
5. Dans cette question, on considère trois fonctions continues  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et on s'intéresse au système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' = x + 2y - z + a(t) \\ y' = 2x + 4y - 2z + b(t) \\ z' = -x - 2y + z + c(t) \end{cases} ,$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , inconnues, de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de la variable réelle  $t$ .

Une solution de  $(S)$  est une application  $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  où  $x, y$  et  $z$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que, pour tout réel  $t$ , on ait

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2y(t) - z(t) + a(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) + b(t) \\ z'(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) + c(t) \end{cases} .$$

- a. Préciser quel vecteur colonne  $B(t) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  dépendant de la variable réelle  $t$  permet d'écrire le système  $(S)$  sous la forme

$$(S) \quad X' = AX + B(t).$$

- b. Soit  $Y$  une solution particulière sur  $\mathbb{R}$  de  $(S)$ . Démontrer que  $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  est solution de  $(S)$  sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $Z : t \mapsto X(t) - Y(t)$  est solution de  $(SH)$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $(SH)$  désignant le système de la question 2.
- c. Dans cette question, on pose, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a(t) = 1$ ,  $b(t) = 2(1 - e^t)$  et  $c(t) = e^t - 1$ .

Démontrer que  $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est solution de  $(S)$  sur  $\mathbb{R}$ .

En déduire toutes les solutions du système différentiel  $(S)$  sur  $\mathbb{R}$ .

# Mathématiques appliquées - Sujet zéro 1

---

## Exercice 1

### Partie 1

Soit  $A$  la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  est  $A$ .

1. Déterminer le rang de  $A - 6I_3$ .

En déduire une valeur propre de  $A$  et la dimension du sous-espace propre associé.

2. Soit  $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $U = AV - 2V$ .

Montrer que  $U$  est un vecteur propre de  $A$  et déterminer la valeur propre associée.

3. Posons  $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(a) Montrer que  $(U, V, W)$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

(b) Donner la matrice  $B$  de  $f$  dans cette base.

(c) Montrer alors qu'il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$  et expliciter la matrice  $P$ . On ne cherchera pas  $P^{-1}$ .

4. La matrice  $A$  est-elle inversible ? La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

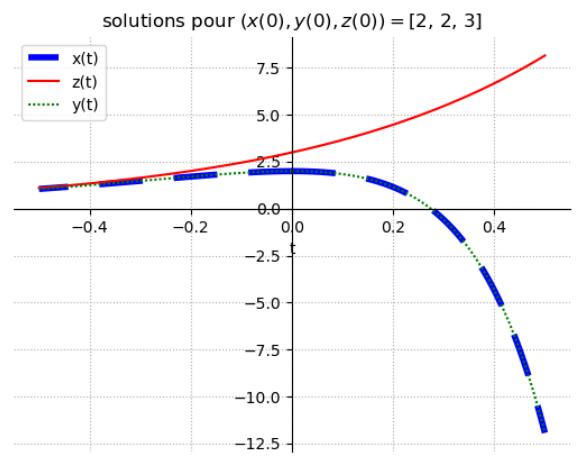
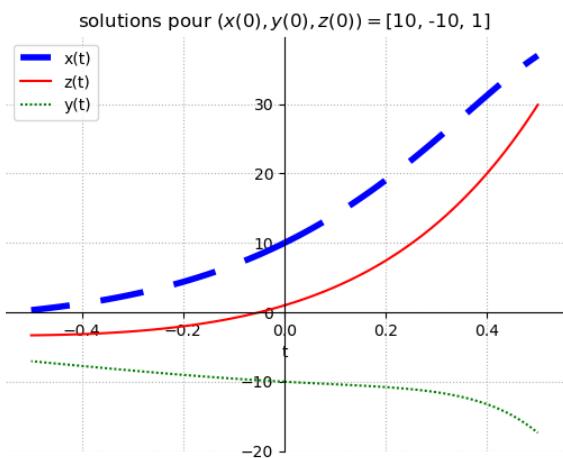
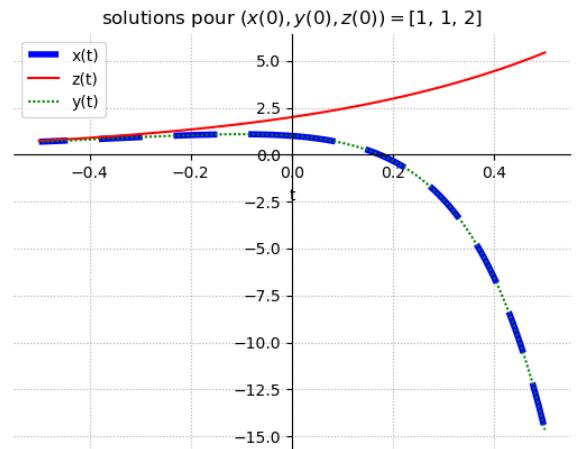
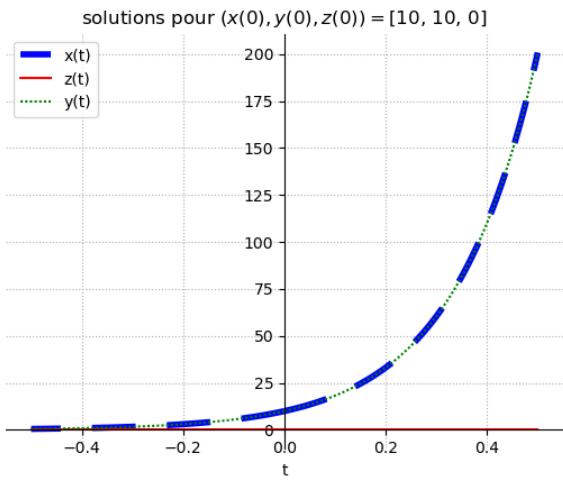
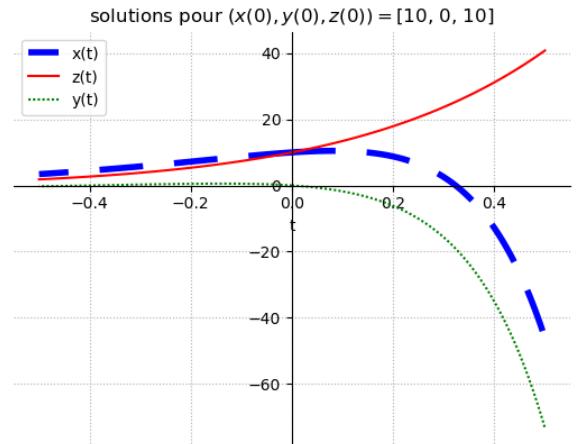
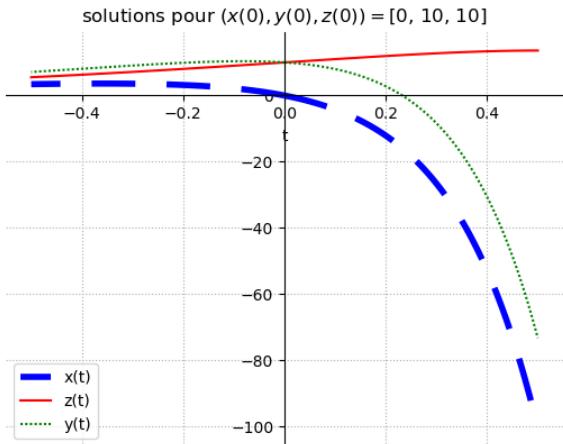
### Partie 2

On considère le système différentiel suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 5x(t) + y(t) - 4z(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 3y(t) - 4z(t), \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t). \end{cases}$$

où  $x, y, z$  sont trois fonctions inconnues, de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On note pour tout réel  $t$  :  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ .

5. En utilisant le module `scipy.integrate` de Python, on obtient le tracé suivant des solutions du système, en faisant varier les valeurs de  $x(0), y(0), z(0)$ .



Que peut-on conjecturer quand  $x(0) = y(0)$  ?

6. Montrer que pour tout réel  $t$  :  $X'(t) = A X(t)$ .
7. On note pour tout réel  $t$  :  $Y(t) = P^{-1} X(t)$ . On admet que pour tout réel  $t$ ,  $Y'(t) = P^{-1} X'(t)$ . Montrer que pour tout réel  $t$  :  $Y'(t) = B Y(t)$ .

8. (a) Donner les fonctions  $\varphi$  définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_1)$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 6\varphi(t) \quad (\mathcal{E}_1)$$

(b) Donner les fonctions  $\varphi$  définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_2)$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 2\varphi(t) \quad (\mathcal{E}_2)$$

(c) Soit  $c$  un réel.

Montrer que la fonction  $t \rightarrow cte^{2t}$  est une solution de l'équation différentielle  $\mathcal{E}_3$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t} \quad (\mathcal{E}_3)$$

Déterminer toutes les solutions de  $(\mathcal{E}_3)$ .

9. En notant, pour tout réel  $t$ ,  $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$ , montrer que  $\gamma$  est solution de  $(\mathcal{E}_1)$ ,  $\beta$  est solution de  $(\mathcal{E}_2)$  et  $\alpha$  est solution de  $(\mathcal{E}_3)$  pour un réel  $c$  bien choisi.

10. Montrer qu'il existe trois réels  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) &= (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{cases}$$

11. En déduire, en notant  $x_0 = x(0)$ ,  $y_0 = y(0)$  et  $z_0 = z(0)$ , que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) &= \left( (x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0) \right) e^{2t} + \left( \frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0 \right) e^{6t} \\ y(t) &= \left( (x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(y_0 - x_0) \right) e^{2t} + \left( \frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0 \right) e^{6t} \\ z(t) &= \left( (x_0 - y_0)t + z_0 \right) e^{2t} \end{cases}$$

12. Justifier la conjecture faite à la question 5.